Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Definiere folgende Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf Σ^*:

$$x \sim_L y :\Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{reflexiv: } \forall x \in \Sigma^*: x \sim_L x \\ \cdot \text{symmetrisch: } \forall x,y \in \Sigma^* \; x \sim_L y \Leftrightarrow y \sim_L x \\ \cdot \text{transitiv: } \forall x,y,z \in \Sigma^* \; x \sim_L y \text{ und } y \sim_L w \Rightarrow x \sim_L w \end{array}\right\} \text{trivial}$$

Definiere $\Sigma^*/_{\sim_L} := \{ [x] \mid x \in X \}$ wobei $[x] = \{ y \in \Sigma^* \mid y \sim_L x \}$

<u>Satz</u> $L \in \mathcal{L}_{EA} \Leftrightarrow \Sigma^*/_{\sim_L}$ endlich

<u>Bew.</u>

"$\Rightarrow$" (Lemma 3.3)

Sei $L = L(M)$ für einen EA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

<u>Beh.</u> $\forall x \in \Sigma^*: Kl[\hat{\delta}(q_0, x)] \subseteq [x]$

<u>Bew.</u> Sei $y \in Kl[\hat{\delta}(q_0, x)]$

$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, x)$

$\Rightarrow \forall z \in \Sigma^*: \hat{\delta}(q_0, yz) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, y)}_{= \hat{\delta}(q_0, x)}, z) = \hat{\delta}(q_0, xz)$

$\Rightarrow \forall z \in \Sigma^*: yz \in L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, yz) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, xz) \in F \Leftrightarrow xz \in L$

$\Rightarrow y \sim_L x \Rightarrow y \in [x]$ $\vdash$

Aus $Kl[\hat{\delta}(q_0, x)] \subseteq [x]$, $[x] \cap [y] = \emptyset$ falls $[x] \neq [y]$ und Q endlich folgt $\Sigma^*/_{\sim_L}$ endlich

Wieso? Sollte intuitiv klar sein, sonst:

Definiere folgende Funktion $s: \{ K\ell[q] \mid q \in Q \} \to \Sigma^* / \sim_L$

$$s(K\ell[q]) := \begin{cases} [x] & \text{falls } q = \hat{\delta}(q_0, x) \\ [\lambda] & \text{sonst} \end{cases}$$

s ist wohldefiniert:

$q = \hat{\delta}(q_0, x)$ und $q = \hat{\delta}(q_0, y) \Rightarrow K\ell[\hat{\delta}(q_0,x)] = K\ell[\hat{\delta}(q_0,y)] \subseteq [y]$

$\Rightarrow x \in K\ell[\hat{\delta}(q_0,x)] \subseteq [y]$

$\Rightarrow x \sim_L y$

$\Rightarrow [x] = [y]$ $\quad \vdash$

s ist surjektiv, da für jedes $[x] \in \Sigma^* / \sim_L$ gilt $[x] = s(K\ell[\hat{\delta}(q_0,x)])$.

Da $\{ K\ell[q] \mid q \in Q \}$ endlich ist, ist auch $\text{Bild}(s) = \Sigma^* / \sim_L$ endlich. $\quad \vdash$

"$\Leftarrow$"

Sei $\Sigma^* / \sim_L$ endlich. Definiere folgenden EA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$:

$Q := \Sigma^* / \sim_L$

$q_0 := [\lambda]$

$\delta: Q \times \Sigma \to Q$, $([x], a) \mapsto [xa]$

Wohldefiniert: $[x] = [y]$

$\Rightarrow x \sim_L y$

$\Rightarrow \forall z \in \Sigma^*: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

Insbesondere für $z = az'$:

$\Rightarrow \forall z' \in \Sigma^*: xaz' \in L \Leftrightarrow yaz' \in L$

$\Rightarrow xa \sim_L ya \Rightarrow [xa] = [ya]$

$F := \{ [x] \mid x \in L \}$

Wohldefiniert: $[x] = [y]$

$\Rightarrow x \sim_L y$

$\Rightarrow \forall z \in \Sigma^*: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

Insbesondere für $z = \lambda$:

$x \in L \Leftrightarrow y \in L$

Beh. $\forall x \in \Sigma^*: \hat{\delta}(q_0, x) = [x]$

Bew. Induktion über $|x|$

Verankerung: $|x| = 0 \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, \lambda) = q_0 \overset{\text{per Def.}}{=} [\lambda]$

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für alle $y \in \Sigma^*$ mit $|y| < |x|$, wobei $|x| \geq 1$.

$\Rightarrow x = ya$ für ein $y \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

$\Rightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, ya) = \delta(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, y)}_{=[y] \text{ per Induktionsannahme}}, a) = \delta([y], a) \overset{\text{per Def.}}{=} [ya] = [x]$

$\vdash$

Somit gilt: $x \in L(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) \in F \Leftrightarrow [x] \in F \overset{\text{per Def. von } F}{\Leftrightarrow} x \in L$

Also $L = L(M)$, also $L \in \mathcal{L}_{EA}$

$\blacksquare$