TI Übung 3.10.24

Kolmogorov Komplexität

Sei $x_n := (01)^{18} \cdot (0)^{2^{3^n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Finde eine möglichst gute obere Schranke für $K(x_n)$.

Folgendes Pascal Programm gibt x_n aus:

P_{x_n}:
```
begin
  for i from 1 to 18 do: write(01)
  m:=n
  a:=3^m
  b:=2^a
  for i from 1 to b do: write(0)
end
```

Maschinencode von P_{x_n} ist unabhängig von x_n bis auf Kodierung von $n \Rightarrow$ hat Länge $\lceil \log(n+1) \rceil + c$ für c konstant.

$$\Rightarrow K(x_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c \leq \log(n) + c'$$

$$|x_n| = 36 + 2^{3^n} \Rightarrow n = \log_3 \log_2 (|x_n| - 36)$$

$$\Rightarrow K(x_n) \leq \log_2 \log_3 \log_2 (|x_n|) + c' \qquad \square$$

Sei $L := \{1^i 0^j 1^k \mid i,j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ i+j = 2k\}$

Sei x_n das kanonisch n-te Wort in L.
Zeige $K(x_n) \leq 2\log(|x_n|) + c$ für eine Konstante c.

<u>Bew.</u> L ist offensichtlich entscheidbar, also (Satz 2.2):

$$K(x_n) \leq \lceil \log(n+1) \rceil + c \text{ für eine Konstante } c.$$

Abschätzung von n durch $|x_n|$: Sei $x_M \in L$ das kanonisch grösste Wort in $L \cap \{w \in \{0,1\}^* : |w| \leq |x_n|\}$. Also gilt $M \geq n$.
Zudem gilt $M = |L \cap \{w \in \{0,1\}^* : |w| \leq |x_n|\}|$

Sei $|x_n| = 3k$. Dann ist

$$|L \cap \{w \in \{0,1\}^* : |w| \le |x_n|\}| = \sum_{k'=1}^{k} \underbrace{|L \cap \{w \in \{0,1\}^* : |w| = 3k'\}|}_{=2k'+1 \ (\text{freier Parameter } 0 \le i \le 2k')}$$

$$= 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + k = k^2 + 2k = \frac{|x_n|^2}{9} + 2\frac{|x_n|}{3}$$

Zusammengefasst: $n \le M = \frac{|x_n|^2}{9} + 2\frac{|x_n|}{3} \le |x_n|^2$

$$\Rightarrow K(x_n) \le \log(|x_n|^2) + c' = 2\log(|x_n|) + c' \qquad \square$$

<u>Beh.</u> Es existiert keine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Wörtern in $\{0,1\}^*$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: K(x_n) \le \log_2(\sqrt{n})$

<u>Bew.</u> Angenommen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine solche Folge. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

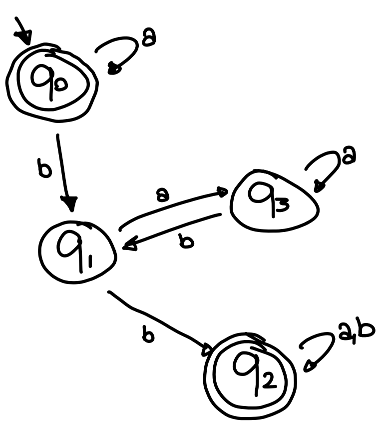
$$\forall n \le N: \ K(x_n) \le \log(\sqrt{n}) \le \log(\sqrt{N})$$

Es existieren aber höchstens $\sum_{i=1}^{\log(\sqrt{N})} 2^i = 2^{\log(\sqrt{N})+1} - 2 \le 2\sqrt{N}$ viele

unterschiedliche Maschinencodes von Pascal-Prog. der Länge $\le \log(\sqrt{N})$, also höchstens $2\sqrt{N}$ viele binäre Wörter mit Kolm. Kompl. $\le \log(\sqrt{N})$.

Also ist $N \le 2\sqrt{N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ ↯

Konstruiere einen endlichen Automaten für die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bb \text{ oder } w \in \{a\}^*\}$



$Kl[q_0] = \{a\}^*$

$Kl[q_1] = \{wb \in \{a,b\}^* \mid wb \text{ enthält nicht das Teilwort } bb\}$

$Kl[q_2] = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$

$Kl[q_3] = \{wa \in \{a,b\}^* \mid wa \text{ enthält nicht } bb\}$

$= \{a,b\}^* - Kl[q_0] - Kl[q_1] - Kl[q_2]$