TI Übung 5.12.24

Worked Ex. Alternative Lösung

$\text{MonoSAT} := \{ F \in \text{SAT} : F \text{ monoton} \}$

Eine KNF-Formel ist monoton, wenn in jeder Klausel nur positive oder nur negierte Variabeln vorkommen.

MonoSAT $\in$ NP: Klar: rate Belegung der Variabeln, prüfe, ob F erfüllt ist (in polynomieller Zeit möglich)

SAT $\leq_p$ MonoSAT: Sei $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots C_m$ (über Variabeln $X = \{x_1, \dots, x_n\}$) mit $C_i = \ell_{i_1} \vee \ell_{i_2} \vee \dots \vee \ell_{i_{k_i}}$ eine Eingabe für SAT. Schreibe $C_i = C_i^+ \vee C_i^-$, wobei C_i^+ alle positiven und C_i^- alle negativen Literale aus C_i enthält.

- Für alle $1 \leq i \leq m$: Konstruiere $D_i' := (C_i^+ \vee y_i) \wedge (\overline{y_i} \vee C_i^-)$ für eine zusätzliche Variable y_i
- Setze $F' := \bigwedge_{i=1}^{m} D_i'$

Diese Konstruktion ist offensichtlich in poly. Zeit möglich.

__Beh.__ $F \in \text{SAT} \Leftrightarrow F' \in \text{MonoSAT}$.

__Bew.__ Offensichtlich ist F' monoton.

"$\Rightarrow$" Sei $\varphi : X \to \{0,1\}$ eine erfüllende Belegung für F. Also gilt:

$$\forall 1 \leq i \leq m: \ \varphi(C_i) = 1 \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq m \ \ \varphi(C_i^+) = 1 \ \vee \ \varphi(C_i^-) = 1.$$

Falls $\varphi(C_i^+) = 1$, setze $\varphi(y_i) = 0$, sonst $\varphi(y_i) = 1$.

Dieses erweiterte φ ist eine erfüllende Belegung für F', da $\forall 1 \leq i \leq m$:

- Falls $\varphi(C_i^+) = 1$, ist $\varphi(\underset{1}{C_i^+} \vee y_i) = 1$ und $\varphi(\underset{1}{\overline{y_i}} \vee C_i^-) = 1$ also $\varphi(D_i') = 1$

- Falls $\varphi(C_i^+) = 0$, ist $\varphi(y_i) = 1$ und $\varphi(C_i^-) = 1$, also $\varphi(C_i^+ \vee \underset{1}{y_i}) = 1$ und $\varphi(\overline{y_i} \vee \underset{1}{C_i^-}) = 1$, also $\varphi(D_i') = 1$.

$\Rightarrow \varphi(F') = 1$

"$\Leftarrow$" Falls $\varphi : X \cup \{y_1, \dots, y_m\} \to \{0,1\}$ eine erfüllende Belegung von F' ist, ist $\varphi|_X$ eine erfüllende Belegung von F, denn:

$\forall 1 \le i \le m$: $\varphi(D_i') = 1 \Rightarrow \varphi(C_i^+ \vee y_i) = 1$ und $\varphi(\overline{y_i} \vee C_i^-) = 1$, also

falls $\varphi(y_i) = 1$: $\varphi(C_i^-) = 1$
falls $\varphi(y_i) = 0$: $\varphi(C_i^+) = 1$

In jedem Fall also $\varphi(C_i) = \varphi(C_i^+ \vee C_i^-) = 1$. $\vdash$

$VC \le_p DS$:

Sei $(\underset{=}{\overset{(V,E)}{G}}, k)$ eine Eingabe für VC, konstruiere daraus $(\overset{(V',E')}{G'}, k')$ Eingabe für DS wie folgt:

$V' := V \cup \{ v_e : e \in E \}$
$E' := E \cup \{ \{v_e, v\} : e \in E, v \in e \}$
$k' := k + |I|$, wobei $I \subseteq V$ die Menge der isolierten Knoten in G ist.

Offensichtlich in poly. Zeit möglich.

<u>Beh.</u> $(G,k) \in VC \Leftrightarrow (G', k') \in DS$

"$\Rightarrow$" Sei $C \subseteq V$, $|C| \le k$ ein Vertex-Cover von G. Setze $D := C \cup I$. Dann ist $|D| \le k'$ und D ist ein Dominating set in G', denn:

- Für alle $v \in V$: Falls v isoliert: $v \in D$ per Konstr.
  Sonst: $\exists w \neq v \in V$: $\{v, w\} \in E$. Da C ein VC: $v \in C$ oder $w \in C$, also v ist dominiert.
- Für alle $e = \{v, w\} \in E$: Da C ein VC: $v \in C$ oder $w \in C$, also v_e dominiert.

"$\Leftarrow$" Sei $D \subseteq V'$ ein Dominating set in G' mit $|D| \le k' = k + |I|$. Sei $C' := D \setminus I$, da $I \subseteq D$ gelten muss: $|C'| \le k$.

Erzeuge C aus C' durch Ersetzen aller $v_e \in D$ durch einen der beiden Knoten in e (oder lasse v_e einfach weg, falls schon einer dieser Knoten in C ist). Dann ist $|C| \le |C'| \le k$

C ist ein Vertex-Cover von G, da für alle $e = \{v, w\} \in E$:

$v_e \in D$ oder $v \in D$ oder $w \in D$ (da v_e dominiert sein muss)

also $v \in C$ oder $w \in C$.

$\vdash$

Spannende Aufgabe aus der Pause heute:

$$L := \{ Kod(M) \# Kod(M') : L(M) \leq_{EE} L(M') \}$$

$L \notin \mathcal{L}_{RE}$, denn $f: \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^*$,

$$f(w) := w \# Kod(M_\emptyset)$$

ist eine EE-Reduktion von $L_\emptyset$ auf L und $L_\emptyset \notin \mathcal{L}_{RE}$.

<u>Bew.</u> $w \in L_\emptyset \Rightarrow w = Kod(M)$ und $L(M) = \emptyset$
$\Rightarrow f(w) = Kod(M) \# Kod(M_\emptyset) \in L$, denn $\emptyset \leq_{EE} \emptyset$ (jede berechenbare Funktion funktioniert)

$w \notin L_\emptyset \Rightarrow \underbrace{w \text{ hat falsche Syntax}}_{\Rightarrow f(w) \text{ hat falsche Syntax}}$ oder $\underbrace{w = Kod(M) \text{ und } L(M) \neq \emptyset}$

$\Rightarrow f(w) = Kod(M) \# Kod(M_\emptyset) \notin L$, denn eine nichtleere Sprache L ist nicht auf $\emptyset$ EE-reduzierbar (Bild von $v \in L$ müsste in $\emptyset$ sein)

Ähnlich aber anders:

$$L = \{ Kod(M) : L(M) \leq_{EE} L_u \}$$

sieht auf den ersten Blick nichtrekursiv aus (Rice), ist es aber, da $L = KodTM$ (left as an exercise to the reader).