TI Übung 21.11

Worked Example: Wollen zeigen $L_{all} = \{Kod(M) \mid L(M) = \Sigma^*\} \notin \mathcal{L}_{RE}$. Da $L \leq_{EE} L' \wedge L' \in \mathcal{L}_{RE} \Rightarrow L \in \mathcal{L}_{RE}$, zeigen wir $L_H^c \leq_{EE} L_{all}$ (denn $L_H^c \notin \mathcal{L}_{RE}$)

Definiere $f: \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$,

$$f(x) := \begin{cases} Kod(M_x) & \text{falls } x = Kod(M)\#w \\ Kod(M_{all}) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei M_{all} eine TM ist, die sofort nach q_{accept} geht und M_x wie folgt arbeitet:

- bekommt Input $y \in \Sigma_{bool}^*$
- Simuliert $|y|$ Schritte von M auf w
  - Falls M auf w in diesen $|y|$ Schritten hält: reject
  - Sonst: accept

Offensichtlich ist f berechenbar. Ausserdem gilt:

$$x \in L_H^c \Rightarrow \underbrace{(x = Kod(M)\#w \text{ und } M \text{ hält nicht auf } w)} \text{ oder } \underbrace{x \neq Kod(M)\#w}$$

$\Rightarrow x = Kod(M)\#w$ und $\forall y \in \Sigma_{bool}^*$: M hält nicht auf w in $|y|$ Schritten

$\Rightarrow f(x) = Kod(M_x)$ und M_x akzeptiert jedes $y \in \Sigma_{bool}^*$

$\Rightarrow f(x) \in L_{all}$

(für $x \neq Kod(M)\#w$:) $\Rightarrow f(x) = Kod(M_{all}) \in L_{all}$

$x \notin L_H^c \Rightarrow x = Kod(M)\#w$ und M hält auf w

$\Rightarrow x = Kod(M)\#w$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: M hält auf w in n_0 Schritten

$\Rightarrow f(x) = Kod(M_x)$ und M_x verwirft z.B. 0^{n_0}

$\Rightarrow f(x) \notin L_{all}$. $\square$

Bemerke: $L_{all}^c \notin \mathcal{L}_{RE}$ (zeige z.B. $L_{diag} \leq_{EE} L_{all}^c$)

Sei $L_{universal} = \{Kod(M) \mid L(M) = L_u\}$

$L_{universal} \notin \mathcal{L}_R$ (Rice)

$L_{universal} \leq_R L_u$: Sei A ein Algo. mit $L(A) = L_u$.

Konstruiere Algo. B mit $L(B) = L_{universal}$ wie folgt:

- bekommt Input $x \in \Sigma_{bool}^*$, prüfe, ob $x = Kod(M)$ für eine TM M, falls nicht, verwerfe.
- Sonst: Konstruiere $Kod(M_x)$, wobei M_x:
  - Ignoriert Input
  - Für $i = 1, 2, \ldots$
    Sei w_i das kanonisch i-te Wort in $\{0,1,\#\}^*$. Berechne $A(w_i)$ und $A(Kod(M)\#w_i)$. Falls eines akzeptiert und das andere nicht: accept.
- Berechne $A(Kod(M_x)\#\lambda)$, verneine Output.

Offensichtlich hält B immer, da A immer hält. Ausserdem:

$x \in L_{universal} \Leftrightarrow x = Kod(M)$ und $L(M) = L_u$

$\Leftrightarrow x = Kod(M)$ und für alle $w \in \{0,1,\#\}^*$: $(\underbrace{M \text{ akz. } w}_{\Leftrightarrow Kod(M)\#w \in L_u} \Leftrightarrow \underbrace{w \in L_u}_{A \text{ akz. } w})$

$\Leftrightarrow A$ akz. $Kod(M)\#w$

$\Leftrightarrow x = Kod(M)$ und für alle $i = 1, 2, \ldots$: $A(Kod(M)\#w_i) \equiv A(w_i)$

$\Leftrightarrow x = Kod(M)$ und M_x hält auf keinem Input

$\Leftrightarrow x = Kod(M)$ und $\underbrace{\lambda \notin L(M_x)}$

$\Leftrightarrow A$ verw. $Kod(M_x)\#\lambda$

$\Leftrightarrow B$ akz. x

$\square$