Aufgabe 13 b)

<u>Aufgabe</u> Zeige, dass $L = \{0^p \mid p \text{ ist prim}\}$ nicht regulär ist.

Beweisvariante Pumping Lemma + Primzahlsatz:

Angenommen, L sei regulär. Sei n_0 die Konstante aus dem Pumping Lemma für L. Sei $w := 0^p$ für $p \geq n_0$ prim. Nach dem PL existiert eine Zerlegung $w = yxz$, die (i), (ii) und (iii) aus dem PL erfüllt. Also ist $y = 0^n$, $x = 0^m$, $z = 0^{p-m-n}$ mit $m \geq 1$ und $n+m \leq n_0$.

Da $w = yx^1z \in L$, gilt $\forall k \in \mathbb{N}: yx^kz = 0^n 0^{km} 0^{p-m-n} = 0^{p+(k-1)m} \in L$. Also: $\forall k \in \mathbb{N}: p + (k-1) \cdot m$ prim. Insbesondere ist der Abstand zwischen aufeinander folgenden Primzahlen grösser p höchstens m. Der Abstand zwischen aufeinander folgenden Primzahlen $\leq p$ ist trivialerweise höchstens p. Da $m \leq p$, gilt also für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$p_{i+1} - p_i \leq p$$

Wir bemerken, dass $p_1 = 2$ (bzw. $p_0 = 2$, je nachdem, wie man zählt) und deshalb:

$$\forall i \in \mathbb{N}: \; p_i - 2 = p_i - p_1 = \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{p_{j+1} - p_j}_{\leq p} \quad \text{(Teleskopsumme)}$$

$$\leq (i-1) \cdot p. \qquad (*)$$

Sei $M \in \mathbb{N}$ und p_i die kleinste Primzahl $> M$. Dann ist

$$\text{Prim}(M) = \text{Prim}(p_i) - 1 = i - 1$$

Also $\forall M \in \mathbb{N}: \; \text{Prim}(M) = i - 1 \overset{(*)}{\geq} \frac{p_i - 2}{p} \geq \frac{M-2}{p}.$

Nach dem Primzahlsatz ist $\lim_{M \to \infty} \frac{\text{Prim}(M)}{M / \ln M} = 1$, also

existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall M \geq N: \; \text{Prim}(M) < 2 \cdot \frac{M}{\ln M}$.

Folglich: $\forall M \geq N: \; \frac{M-2}{p} < 2 \cdot \frac{M}{\ln M}$

$$\Rightarrow \forall M \geq N: \; \ln M \cdot \frac{M-2}{M} < 2p \;\; \text{↯}$$

$\square$