ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Dennis Komm
Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Übungsaufgaben – Blatt Worked Example

Zürich, 29. November 2024

Aufgabe

Eine Klausel heisst *monoton*, wenn ihre Literale alle positiv oder alle negativ sind. Beispielsweise ist $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ monoton, $(x_1 \vee \overline{x}_2)$ aber nicht. Formaler gilt für eine Klausel $C = (\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k)$ einer KNF-Formel über einer Variablenmenge X also

$$C \text{ ist monoton } \iff \{\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k\} \subseteq X \;\vee\; \{\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k\} \subseteq \{\overline{x} \mid x \in X\}.$$

Eine KNF-Formel heisst monoton, wenn alle ihre Klauseln monoton sind.

Beweisen Sie, dass $\textsc{MonoSAT} \coloneqq \{F \in \text{SAT} \mid F \text{ ist monoton}\}$ NP-vollständig ist.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass MonoSAT in $\mathcal{NP}$ liegt. Hierfür können wir die gleiche Idee verwenden, die wir in der Vorlesung für SAT gesehen haben: Wir raten nichtdeterministisch eine Belegung der Variablen und überprüfen, ob diese die Formel erfüllt. Um zu zeigen, dass MonoSAT $\mathcal{NP}$-schwer ist, geben wir eine Reduktion von SAT an, wir zeigen also SAT $\leq_{\text{p}}$ MonoSAT. Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in KNF über den Variablen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, wobei jede Klausel die Form $C_i = l_{i,1} \vee \ldots \vee l_{i,k_i}$ hat für Literale $l_{i,j} \in X \cup \overline{X}$. Dabei bezeichne $\overline{X} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$ die Menge der Negationen der Variablen aus X. Wir konstruieren aus F eine monotone Formel Φ wie folgt. Wir definieren eine Menge $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ von neuen Variablen, die nicht in X vorkommen. Dann ersetzen wir alle Vorkommen von $\overline{x_i}$ in F durch y_i. Weiterhin fügen wir für jede Variable x_i die beiden monotonen Klauseln $(x_i \vee y_i)$ und $(\overline{x_i} \vee \overline{y_i})$ zu F hinzu und erhalten so die offenbar monotone Formel Φ. Diese Reduktion ist offenbar in Polynomzeit durchführbar. Wir zeigen jetzt, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn dies auch für Φ gilt. Sei $\alpha\colon X \to \{0,1\}$ eine erfüllende Belegung für F. Wir erweitern α zu einer Belegung $\beta\colon X \cup Y \to \{0,1\}$ für Φ, indem wir $\beta(x_i) = \alpha(x_i)$ und $\beta(y_i) = 1 - \alpha(x_i)$ setzen, für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Um zu zeigen, dass β die Formel Φ erfüllt, bemerken wir, dass Φ gerade so definiert ist, dass alle negativen Vorkommen der Variablen x_i durch positive Vorkommen von y_i ersetzt wurden. Die neu hinzugefügten Klauseln in Φ werden ebenfalls von β erfüllt, weil $\beta(x_i) = 1 - \beta(y_i)$ gilt und somit in jeder der neuen Klauseln genau ein Literal erfüllt ist. Damit erfüllt β die Formel Φ. Umgekehrt sei jetzt $\beta\colon X \cup Y \to \{0,1\}$ eine erfüllende Belegung für Φ. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sind die beiden Klauseln $(x_i \vee y_i)$ und $(\overline{x_i} \vee \overline{y_i})$ nur dann gleichzeitig erfüllt, wenn $\beta(x_i) = 1 - \beta(y_i)$ gilt. Wir können also eine Belegung $\alpha\colon X \to \{0,1\}$ für F definieren, indem wir einfach β auf X einschränken. Weil jede Klausel in Φ durch β erfüllt wird, werden die entsprechenden Klauseln in F, in denen $\overline{x_i}$ statt y_i steht, durch α erfüllt.